

Quelques résultats d'équivalence asymptotique pour des expériences statistiques dans un cadre non paramétrique

Ester Mariucci

Laboratoire Jean Kuntzmann, Grenoble

Sana Louhichi (LJK Grenoble)
Pierre Étoré (Grenoble INP)

Soutenance de thèse, 16 septembre 2015

Table des matières

- 1 Comparaison des expériences statistiques
 - Distance entre modèles statistiques
 - Exemples
- 2 Résultats principaux
 - Équivalence asymptotique dans des modèles à sauts (densité de Lévy inconnue)
 - Équivalence asymptotique dans des modèles à sauts (dérivée inconnue)
 - Équivalence asymptotique pour des modèles à densité
 - Équivalence asymptotique pour des modèles de diffusion
 - Distance L_1 pour des processus additifs
- 3 Conclusions et perspectives

Déficiences

Un statisticien dispose de plusieurs expériences pour estimer un certain paramètre θ . Comment les comparer ?

- Expérience 1 : $\mathcal{E}_1 = (\mathcal{X}_1, \mathcal{T}_1, (P_{1,\theta} : \theta \in \Theta))$,
- Expérience 2 : $\mathcal{E}_2 = (\mathcal{X}_2, \mathcal{T}_2, (P_{2,\theta} : \theta \in \Theta))$.

Défiance

Un statisticien dispose de plusieurs expériences pour estimer un certain paramètre θ . Comment les comparer ?

- Expérience 1 : $\mathcal{E}_1 = (\mathcal{X}_1, \mathcal{T}_1, (P_{1,\theta} : \theta \in \Theta))$,
- Expérience 2 : $\mathcal{E}_2 = (\mathcal{X}_2, \mathcal{T}_2, (P_{2,\theta} : \theta \in \Theta))$.

Définition

La **défiance** (le défaut) de \mathcal{E}_1 par rapport à \mathcal{E}_2 est définie par

$$\delta(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \inf_K \sup_{\theta \in \Theta} \|P_{2,\theta} - KP_{1,\theta}\|_{VT}$$

où l'inf est pris sur l'ensemble des “transitions” K possibles.

Rappel : $\|\mu_1 - \mu_2\|_{VT} = \sup_A |\mu_1(A) - \mu_2(A)| = \frac{1}{2}L_1(\mu_1, \mu_2)$.

Remarque : en particulier, les noyaux de Markov sont des transitions.

Distance de Le Cam

Définition

La **distance de Le Cam** entre \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 est définie comme

$$\Delta(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \max(\delta(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2), \delta(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1)).$$

Les expériences \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont dites **équivalentes** si $\Delta(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = 0$. Deux suites d'expériences $\mathcal{E}_1^n, \mathcal{E}_2^n$ sont **asymptotiquement équivalentes** si $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(\mathcal{E}_1^n, \mathcal{E}_2^n) = 0$.

Propriété : Δ définit une pseudo-métrique sur la classe de toutes les expériences ayant le même espace des paramètres.

Distance de Le Cam

Définition

La **distance de Le Cam** entre \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 est défini comme

$$\Delta(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \max(\delta(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2), \delta(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1)).$$

Les expériences \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont dites **équivalentes** si $\Delta(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = 0$. Deux suites d'expériences $\mathcal{E}_1^n, \mathcal{E}_2^n$ sont **asymptotiquement équivalentes** si $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(\mathcal{E}_1^n, \mathcal{E}_2^n) = 0$.

Propriété : Δ définit une pseudo-métrique sur la classe de toutes les expériences ayant le même espace des paramètres.

Interprétation : $\Delta(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ peut être vue comme un indicateur numérique du coût nécessaire pour reconstruire, via des transitions, l'expérience \mathcal{E}_2 à partir de l'expérience \mathcal{E}_1 et vice versa.

Une caractérisation de la déficience

Théorème (Le Cam, 1986)

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. $\delta(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \leq \varepsilon$ si et seulement si : pour toute fonction de perte L bornée et pour toute règle de décision π_2 dans \mathcal{E}_2 , il existe une règle de décision π_1 dans \mathcal{E}_1 telle que

$$R_\theta(\mathcal{E}_1, \pi_1, L) \leq R_\theta(\mathcal{E}_2, \pi_2, L) + \varepsilon, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Rappel : le risque est

$$R_\theta(\mathcal{E}, \pi, L) = \int \left(\int L(\theta, z) \pi(y, dz) \right) P_\theta(dy).$$

Équivalences asymptotiques dans un contexte non paramétrique

$$\mathcal{E}_1^n = \left(\mathcal{X}_{1,n}, \mathcal{T}_{1,n}, (P_{1,n}^f : f \in \mathcal{F}) \right),$$
$$\mathcal{E}_2^n = \left(\mathcal{X}_{2,n}, \mathcal{T}_{2,n}, (P_{2,n}^f : f \in \mathcal{F}) \right).$$

Si deux suites d'expériences $(\mathcal{E}_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mathcal{E}_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont asymptotiquement équivalentes au sens de Le Cam :

$$\Delta(\mathcal{E}_1^n, \mathcal{E}_2^n) \rightarrow 0,$$

alors les propriétés asymptotiques des procédures d'estimation sont identiques pour ces expériences

\implies il suffit de choisir la suite d'expériences la plus simple lorsque l'on étudie ces propriétés.

Résultat de Brown et Low (1996)

1 Modèle de régression non paramétrique.

$$Y_i = f\left(\frac{i}{n}\right) + \sigma\left(\frac{i}{n}\right)\varepsilon_i, \quad (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ i.i.d. } \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\mathcal{P}_n = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), (P_f^n : f \in \mathcal{F})), \quad P_f^n \text{ loi de } (Y_1, \dots, Y_n).$$

2 Modèle de bruit blanc gaussien.

$$dy_t = f(t)dt + \frac{\sigma(t)}{\sqrt{n}}dW_t, \quad t \in [0, 1] \quad (W_t) \text{ m.B.s.}$$

$$\mathcal{Q}_n = (C, \mathcal{C}, (Q_f^n : f \in \mathcal{F})), \quad Q_f^n \text{ loi de } (y_t)_{t \in [0, 1]}.$$

Résultat : sous certaines hypothèses sur \mathcal{F} , $\Delta(\mathcal{P}_n, \mathcal{Q}_n) \rightarrow 0$.

L. D. Brown, M. G. Low, Asymptotic equivalence of nonparametric regression and white noise. Ann. Statist. 24 (6) (1996) 2384–2398.

Résultat de Nussbaum (1996)

① Modèle d'estimation de densité.

$(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ v.a. i.i.d. de densité $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

$\mathcal{P}_n = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), (P_f^n : f \in \mathcal{F}))$, P_f^n loi de (Y_1, \dots, Y_n) .

② Modèle de bruit blanc gaussien.

$$dy_t = \sqrt{f(t)}dt + \frac{1}{2\sqrt{n}}dW_t, \quad t \in [0, 1], \quad (W_t) \text{ m.B.s.}$$

$\mathcal{Q}_n = (C, \mathcal{C}, (Q_f^n : f \in \mathcal{F}))$, Q_f^n loi de $(y_t)_{t \in [0, 1]}$.

Résultat : si $\mathcal{F} = \{f : f \geq \varepsilon, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\gamma\}$, les modèles \mathcal{P}_n et \mathcal{Q}_n sont asymptotiquement équivalents.

M. Nussbaum, Asymptotic equivalence of density estimation and Gaussian white noise. Ann. Statist. 24 (6) (1996) 2399–2430.

Bibliographie non exhaustive

Résultats d'équivalence asymptotique dans un contexte non paramétrique :

- Régression non paramétrique (Brown et Low 1996 ; Grama et Nussbaum 2002) ;
- Modèles à densité (Nussbaum 1996 ; Carter 2002 ; Brown, Carter, Low et Zhang 2004) ;
- Modèles de diffusion (Milstein et Nussbaum 1998 ; Delattre et Hoffmann 2002 ; Dalalyan et Reiss 2006 ; Genon-Catalot et Larédo 2014).

- Comparaison des expériences statistiques
 - Distance entre modèles statistiques
 - Exemples

- 2 Résultats principaux
 - Équivalence asymptotique dans des modèles à sauts (densité de Lévy inconnue)
 - Équivalence asymptotique dans des modèles à sauts (dérivée inconnue)
 - Équivalence asymptotique pour des modèles à densité
 - Équivalence asymptotique pour des modèles de diffusion
 - Distance L_1 pour des processus additifs

- Conclusions et perspectives

Équivalence asymptotique dans des modèles à sauts (densité de Lévy inconnue)

Processus de Lévy à sauts purs (à variation finie)

$$X_t = \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s, \quad X_0 = 0, \quad t > 0,$$

Processus de Lévy à sauts purs (à variation finie)

$$X_t = \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s, \quad X_0 = 0, \quad t > 0,$$

- La dynamique des sauts d'un processus de Lévy est entièrement dictée par sa densité de Lévy, notée f .

Processus de Lévy à sauts purs (à variation finie)

$$X_t = \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s, \quad X_0 = 0, \quad t > 0,$$

- La dynamique des sauts d'un processus de Lévy est entièrement dictée par sa densité de Lévy, notée f .
- La mesure de Lévy

$$\nu(A) = \int_A f(x) dx = \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[\sum_{0 < s \leq t} \mathbb{I}_A(\Delta X_s) \right], \quad t > 0$$

est le nombre moyen des sauts (par unités de temps) dont l'amplitude appartient au borélien A .

Le problème

Supposons qu'on observe $\{X_t\}_{t \geq 0}$ à des instants équidistants $0 = t_0 < \dots < t_n = T_n \rightarrow \infty$ tels que

$$\Delta_n = \frac{T_n}{n} \downarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Problème : comment estimer la densité de Lévy f à partir des observations discrètes $(X_{t_i})_{i=0}^n$?

Le problème

Supposons qu'on observe $\{X_t\}_{t \geq 0}$ à des instants équidistants $0 = t_0 < \dots < t_n = T_n \rightarrow \infty$ tels que

$$\Delta_n = \frac{T_n}{n} \downarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Problème : comment estimer la densité de Lévy f à partir des observations discrètes $(X_{t_i})_{i=0}^n$?

Deux questions se posent :

- ❶ Peut-on construire un modèle plus simple d'un point de vue mathématique, mais équivalent du point de vue de l'information sur $f(\cdot)$, à partir de l'observation de $(X_{t_i})_{i=1}^n$?
- ❷ Quelle quantité d'information sur $f(\cdot)$ perdons-nous en observant $(X_{t_i})_{i=0}^n$ à la place de $\{X_t\}_{t \in [0, T_n]}$?

Définition des expériences

Soit X un processus de Lévy à sauts purs de mesure de Lévy $\nu \ll \nu_0$, ν_0 mesure de Lévy fixée, à support sur $I \subseteq \mathbb{R}$ et éventuellement infinie. On notera $f = \frac{d\nu}{d\nu_0}$.

- $P_{T_n}^f$: loi du processus $\{X_t\}_{t \in [0, T_n]}$ sur (D, \mathcal{D}) ,
- Q_n^f : loi du vecteur $(X_{t_0}, \dots, X_{t_n})$ sur $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}))$,
- \mathbb{W}_n^f : loi induite sur (C, \mathcal{C}) par

$$dy_t = \sqrt{f(t)}dt + \frac{dW_t}{2\sqrt{T_n}\sqrt{g(t)}}, \quad g = \frac{d\nu_0}{dx}, \quad t \in I.$$

Définition des expériences

Soit X un processus de Lévy à sauts purs de mesure de Lévy $\nu \ll \nu_0$, ν_0 mesure de Lévy fixée, à support sur $I \subseteq \mathbb{R}$ et éventuellement infinie. On notera $f = \frac{d\nu}{d\nu_0}$.

- $P_{T_n}^f$: loi du processus $\{X_t\}_{t \in [0, T_n]}$ sur (D, \mathcal{D}) ,
- Q_n^f : loi du vecteur $(X_{t_0}, \dots, X_{t_n})$ sur $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}))$,
- \mathbb{W}_n^f : loi induite sur (C, \mathcal{C}) par

$$dy_t = \sqrt{f(t)}dt + \frac{dW_t}{2\sqrt{T_n}\sqrt{g(t)}}, \quad g = \frac{d\nu_0}{dx}, \quad t \in I.$$

Les modèles statistiques considérés sont :

- $\mathcal{P}_n^{\nu_0} = (D, \mathcal{D}, \{P_{T_n}^f : f \in \mathcal{F}\})$,
- $\mathcal{Q}_n^{\nu_0} = (\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}), \{Q_n^f : f \in \mathcal{F}\})$,
- $\mathcal{W}_n^{\nu_0} = (C, \mathcal{C}, \{\mathbb{W}_n^f : f \in \mathcal{F}\})$.

Espace des paramètres \mathcal{F}

Soit $f \in \mathcal{F}$, où \mathcal{F} est une classe de densités par rapport à ν_0 .

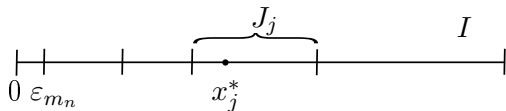
$$(H1) \quad \exists \kappa, M > 0 : \kappa \leq f(y) \leq M, \forall y \in I, \forall f \in \mathcal{F}.$$

$$(H2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{I \setminus (-\varepsilon_{m_n}, \varepsilon_{m_n})} \left(\sqrt{f} - \sqrt{\hat{f}_{m_n}} \right)^2 d\nu_0 = 0,$$

$$(H3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \sup_{f \in \mathcal{F}} \left(A_{m_n}^2(f) + B_{m_n}^2(f) + nC_{m_n}^2(f) \right) = 0,$$

pour certaines suite $\varepsilon_{m_n} \rightarrow 0$ et $m_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Ici

$$\hat{f}_m(x) = \sum_j V_j(x) \int_{J_j} f(s) \nu_0(ds); \quad \hat{f}_m(x_j^*) = \frac{1}{\mu_m} \int_{J_j} f(s) \nu_0(ds);$$



$$\nu_0(J_j) = \mu_m$$

$$x_j^* = \frac{\int_{J_j} x \nu_0(dx)}{\mu_m}$$

Espace des paramètres

Pour tout $m = m_n$, on a :

$$A_m^2(f) := \int_{I \setminus [-\varepsilon_m, \varepsilon_m]} \left(\widehat{\sqrt{f}}_m(y) - \sqrt{f(y)} \right)^2 \nu_0(dy),$$

$$B_m^2(f) := \sum_{\substack{j=-m, \dots, m \\ j \neq -1, 0, 1}} \left(\int_{J_j} \frac{\sqrt{f(y)}}{\sqrt{\nu_0(J_j)}} \nu_0(dy) - \sqrt{\nu(J_j)} \right)^2,$$

$$C_m^2(f) := \int_{-\varepsilon_m}^{\varepsilon_m} (\sqrt{f(t)} - 1)^2 \nu_0(dt).$$

Espace des paramètres

Pour tout $m = m_n$, on a :

$$A_m^2(f) := \int_{I \setminus [-\varepsilon_m, \varepsilon_m]} \left(\widehat{\sqrt{f}}_m(y) - \sqrt{f(y)} \right)^2 \nu_0(dy),$$

$$B_m^2(f) := \sum_{\substack{j=-m, \dots, m \\ j \neq -1, 0, 1}} \left(\int_{J_j} \frac{\sqrt{f(y)}}{\sqrt{\nu_0(J_j)}} \nu_0(dy) - \sqrt{\nu(J_j)} \right)^2,$$

$$C_m^2(f) := \int_{-\varepsilon_m}^{\varepsilon_m} (\sqrt{f(t)} - 1)^2 \nu_0(dt).$$

Exemple : lorsque ν_0 est la mesure de Lebesgue de $[0, 1]$,

$$\mathcal{F} = \{f : \kappa \leq f \leq M, |f'(x) - f'(y)| \leq K|x - y|^\gamma, \forall x, y \in [0, 1]\}$$

vérifie les Hypothèses (H1), (H2) et (H3).

Théorème (M., 2015)

Soit $m = m_n$ une suite vérifiant les Hypothèses (H1), (H2) et (H3) et $\varepsilon_m \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$. Pour n assez grand on a :

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{Q}_n^{\nu_0}, \mathcal{W}_n^{\nu_0}) &= O\left(\nu_0\left(I \setminus [-\varepsilon_m, \varepsilon_m]\right) \sqrt{n\Delta_n^2} + \frac{m \ln m}{\sqrt{n}}\right. \\ &\quad \left. + \sqrt{n\Delta_n} \sup_{f \in \mathcal{F}} \left(A_m(f) + B_m(f) + L_2(f, \hat{f}_m)\right)\right. \\ &\quad \left. + \sqrt{n\sqrt{\Delta_n} \sup_{f \in \mathcal{F}} C_m(f)}\right). \\ \Delta(\mathcal{P}_n^{\nu_0}, \mathcal{W}_n^{\nu_0}) &= O\left(\sqrt{n\Delta_n} \sup_{f \in \mathcal{F}} \left(A_m(f) + B_m(f) + H(f, \hat{f}_m)\right)\right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{m^2}{n\Delta_n \nu_0(I \setminus [-\varepsilon_m, \varepsilon_m])}}\right). \end{aligned}$$

Équivalence asymptotique dans des modèles à sauts (densité de Lévy inconnue)

Le cas d'un processus de Poisson composé

$$\mathcal{P}_n : X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \in [0, T_n], \quad \text{densité de Lévy } f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R};$$

$$\mathcal{Q}_n : (X_{t_i})_{i=0}^n, \quad t_i = i \frac{T_n}{n}, \quad \Delta_n := \frac{T_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty;$$

$$\mathcal{W}_n : dy_t = \sqrt{f(t)} dt + \frac{dW_t}{2\sqrt{T_n}}, \quad t \in [0, 1];$$

$$f \in \mathcal{F} = \left\{ f : \kappa \leq f(x) \leq M, |f'(x) - f'(y)| \leq K|x - y|^\gamma \right\}.$$

Résultat : les trois modèles \mathcal{P}_n , \mathcal{Q}_n et \mathcal{W}_n sont asymptotiquement équivalents.

Majorations de la distance de Le Cam

Plus précisément nous obtenons :

$$\Delta(\mathcal{P}_n, \mathcal{W}_n) = \begin{cases} O\left((n\Delta_n)^{-\frac{\gamma}{4+2\gamma}}\right) & \text{si } \gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \\ O\left((n\Delta_n)^{-\frac{1}{10}}\right) & \text{si } \gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Majorations de la distance de Le Cam

Plus précisément nous obtenons :

$$\Delta(\mathcal{P}_n, \mathcal{W}_n) = \begin{cases} O\left((n\Delta_n)^{-\frac{\gamma}{4+2\gamma}}\right) & \text{si } \gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \\ O\left((n\Delta_n)^{-\frac{1}{10}}\right) & \text{si } \gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Lorsque $\Delta_n = n^{-\beta}$, $\frac{1}{2} < \beta < 1$, une borne supérieure pour la vitesse de convergence de $\Delta(\mathcal{Q}_n, \mathcal{W}_n)$ est

$$\Delta(\mathcal{Q}_n, \mathcal{W}_n) = \begin{cases} O\left(n^{-\frac{\gamma+\beta}{4+2\gamma}} \ln n\right) & \text{si } \gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ et } \frac{2+2\gamma}{3+2\gamma} \leq \beta < 1, \\ O\left(n^{\frac{1}{2}-\beta} \ln n\right) & \text{si } \gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ et } \frac{1}{2} < \beta < \frac{2+2\gamma}{3+2\gamma}, \\ O\left(n^{-\frac{2\beta+1}{10}} \ln n\right) & \text{si } \gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ et } \frac{3}{4} \leq \beta < 1, \\ O\left(n^{\frac{1}{2}-\beta} \ln n\right) & \text{si } \gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ et } \frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Idées principales (cas Poisson composé)

But : $(X_{t_i})_{i=0}^n \xleftrightarrow{\Delta} \{y_t\}_{t \in [0,1]}$, où

- X processus de Poisson composé de densité f sur $[0, 1]$,
- $dy_t = \sqrt{f(t)}dt + \frac{1}{2\sqrt{T_n}}dW_t$, $t \in [0, 1]$.

Notation : $J_j = (\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]$, $\theta_j = \int_{J_j} f(x)dx$, $\lambda = \int_0^1 f(x)dx$.

Idées principales (cas Poisson composé)

But : $(X_{t_i})_{i=0}^n \stackrel{\Delta}{\iff} \{y_t\}_{t \in [0,1]}$, où

- X processus de Poisson composé de densité f sur $[0, 1]$,
- $dy_t = \sqrt{f(t)}dt + \frac{1}{2\sqrt{T_n}}dW_t$, $t \in [0, 1]$.

Notation : $J_j = (\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]$, $\theta_j = \int_{J_j} f(x)dx$, $\lambda = \int_0^1 f(x)dx$.

Étape 1. Approximation de Bernoulli :

$(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})_i \stackrel{\Delta}{\iff} (\varepsilon_i Y_i)_i$ ($\varepsilon_i \sim B(\alpha)$ avec $\alpha = \lambda \Delta_n e^{-\lambda \Delta_n}$).

Idées principales (cas Poisson composé)

But : $(X_{t_i})_{i=0}^n \xleftrightarrow{\Delta} \{y_t\}_{t \in [0,1]}$, où

- X processus de Poisson composé de densité f sur $[0, 1]$,
- $dy_t = \sqrt{f(t)}dt + \frac{1}{2\sqrt{T_n}}dW_t$, $t \in [0, 1]$.

Notation : $J_j = (\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]$, $\theta_j = \int_{J_j} f(x)dx$, $\lambda = \int_0^1 f(x)dx$.

Étape 1. Approximation de Bernoulli :

$(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})_i \xleftrightarrow{\Delta} (\varepsilon_i Y_i)_i$ ($\varepsilon_i \sim B(\alpha)$ avec $\alpha = \lambda \Delta_n e^{-\lambda \Delta_n}$).

Étape 2. Approximation multinomiale :

$(\varepsilon_i Y_i)_i \xleftrightarrow{\Delta} \mathcal{M}(n; (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m))$, avec $\gamma_0 = 1 - \alpha$ et $\gamma_i := \alpha \theta_i$
 $i = 1, \dots, m$.

Idées principales (cas Poisson composé)

But : $(X_{t_i})_{i=0}^n \xleftrightarrow{\Delta} \{y_t\}_{t \in [0,1]}$, où

- X processus de Poisson composé de densité f sur $[0, 1]$,
- $dy_t = \sqrt{f(t)}dt + \frac{1}{2\sqrt{T_n}}dW_t$, $t \in [0, 1]$.

Notation : $J_j = (\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]$, $\theta_j = \int_{J_j} f(x)dx$, $\lambda = \int_0^1 f(x)dx$.

Étape 1. Approximation de Bernoulli :

$(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})_i \xleftrightarrow{\Delta} (\varepsilon_i Y_i)_i$ ($\varepsilon_i \sim B(\alpha)$ avec $\alpha = \lambda \Delta_n e^{-\lambda \Delta_n}$).

Étape 2. Approximation multinomiale :

$(\varepsilon_i Y_i)_i \xleftrightarrow{\Delta} \mathcal{M}(n; (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m))$, avec $\gamma_0 = 1 - \alpha$ et $\gamma_i := \alpha \theta_i$
 $i = 1, \dots, m$.

Étape 3. Approximation gaussienne :

$\mathcal{M}(n; (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m)) \xleftrightarrow{\Delta} \bigotimes_{j=1}^m \mathcal{N}(2\sqrt{T_n \theta_j}, 1)$.

Idées principales (cas Poisson composé)

But : $(X_{t_i})_{i=0}^n \xleftrightarrow{\Delta} \{y_t\}_{t \in [0,1]}$, où

- X processus de Poisson composé de densité f sur $[0, 1]$,
- $dy_t = \sqrt{f(t)}dt + \frac{1}{2\sqrt{T_n}}dW_t$, $t \in [0, 1]$.

Notation : $J_j = (\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]$, $\theta_j = \int_{J_j} f(x)dx$, $\lambda = \int_0^1 f(x)dx$.

Étape 1. Approximation de Bernoulli :

$(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})_i \xleftrightarrow{\Delta} (\varepsilon_i Y_i)_i$ ($\varepsilon_i \sim B(\alpha)$ avec $\alpha = \lambda \Delta_n e^{-\lambda \Delta_n}$).

Étape 2. Approximation multinomiale :

$(\varepsilon_i Y_i)_i \xleftrightarrow{\Delta} \mathcal{M}(n; (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m))$, avec $\gamma_0 = 1 - \alpha$ et $\gamma_i := \alpha \theta_i$
 $i = 1, \dots, m$.

Étape 3. Approximation gaussienne :

$\mathcal{M}(n; (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m)) \xleftrightarrow{\Delta} \bigotimes_{j=1}^m \mathcal{N}(2\sqrt{T_n \theta_j}, 1)$.

Étape 4. $\bigotimes_{j=1}^m \mathcal{N}(2\sqrt{T_n \theta_j}, 1) \xleftrightarrow{\Delta} \{y_t\}_{t \in [0,1]}$.

Idées principales (cas Poisson composé)

But : $\{X_t\}_{t \in [0, T_n]} \xleftrightarrow{\Delta} \{y_t\}_{t \in [0, 1]}$, où

- X est un processus de Poisson composé de densité f ,
- $dy_t = \sqrt{f(t)}dt + \frac{1}{2\sqrt{T_n}}dW_t$, $t \in [0, 1]$.

Étape 1. Passer de la densité f à \hat{f}_m

$P_{T_n}^f \xleftrightarrow{\Delta} P_{T_n}^{\hat{f}_m}$ (majoration de la distance en variation totale).

Idées principales (cas Poisson composé)

But : $\{X_t\}_{t \in [0, T_n]} \xleftrightarrow{\Delta} \{y_t\}_{t \in [0, 1]}$, où

- X est un processus de Poisson composé de densité f ,
- $dy_t = \sqrt{f(t)}dt + \frac{1}{2\sqrt{T_n}}dW_t$, $t \in [0, 1]$.

Étape 1. Passer de la densité f à \hat{f}_m

$P_{T_n}^f \xleftrightarrow{\Delta} P_{T_n}^{\hat{f}_m}$ (majoration de la distance en variation totale).

Étape 2. Approximation poissonnienne :

$P_{T_n}^{\hat{f}_m} \xleftrightarrow{\Delta} \bigotimes_{j=1}^m \mathcal{P}(T_n \theta_j)$ (transformations de type Esscher, statistique exhaustive, contrôle distance L_1 , construction explicite d'un noyau).

Idées principales (cas Poisson composé)

But : $\{X_t\}_{t \in [0, T_n]} \xLeftrightarrow{\Delta} \{y_t\}_{t \in [0, 1]}$, où

- X est un processus de Poisson composé de densité f ,
- $dy_t = \sqrt{f(t)}dt + \frac{1}{2\sqrt{T_n}}dW_t$, $t \in [0, 1]$.

Étape 1. Passer de la densité f à \hat{f}_m

$P_{T_n}^f \xLeftrightarrow{\Delta} P_{T_n}^{\hat{f}_m}$ (majoration de la distance en variation totale).

Étape 2. Approximation poissonnienne :

$P_{T_n}^{\hat{f}_m} \xLeftrightarrow{\Delta} \bigotimes_{j=1}^m \mathcal{P}(T_n \theta_j)$ (transformations de type Esscher, statistique exhaustive, contrôle distance L_1 , construction explicite d'un noyau).

Étape 3. Approximation gaussienne :

$\bigotimes_{j=1}^m \mathcal{P}(T_n \theta_j) \xLeftrightarrow{\Delta} \bigotimes_{j=1}^m \mathcal{N}(2\sqrt{T_n \theta_j}, 1)$ (résultats de Brown, Carter, Low et Zhang).

Idées principales (cas Poisson composé)

But : $\{X_t\}_{t \in [0, T_n]} \xleftrightarrow{\Delta} \{y_t\}_{t \in [0, 1]}$, où

- X est un processus de Poisson composé de densité f ,
- $dy_t = \sqrt{f(t)}dt + \frac{1}{2\sqrt{T_n}}dW_t$, $t \in [0, 1]$.

Étape 1. Passer de la densité f à \hat{f}_m

$P_{T_n}^f \xleftrightarrow{\Delta} P_{T_n}^{\hat{f}_m}$ (majoration de la distance en variation totale).

Étape 2. Approximation poissonnienne :

$P_{T_n}^{\hat{f}_m} \xleftrightarrow{\Delta} \bigotimes_{j=1}^m \mathcal{P}(T_n \theta_j)$ (transformations de type Esscher, statistique exhaustive, contrôle distance L_1 , construction explicite d'un noyau).

Étape 3. Approximation gaussienne :

$\bigotimes_{j=1}^m \mathcal{P}(T_n \theta_j) \xleftrightarrow{\Delta} \bigotimes_{j=1}^m \mathcal{N}(2\sqrt{T_n \theta_j}, 1)$ (résultats de Brown, Carter, Low et Zhang).

Étape 4. $\bigotimes_{j=1}^m \mathcal{N}(2\sqrt{T_n \theta_j}, 1) \xleftrightarrow{\Delta} \{y_t\}_{t \in [0, 1]}$.

Processus à accroissements indépendants

$$\mathcal{P}_n : \quad X_t = \eta + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t \sigma_n(s)dW_s + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \in [0, T_n],$$

- $f(\cdot) \in \mathcal{F}$ est **inconnue**.
- $\sigma_n^2(\cdot)$ est connu. Soit $T_n \rightarrow \infty$ et $\sigma_n(\cdot) = \sigma(\cdot)$, soit $T_n \equiv T$ et $\sigma_n(\cdot) = \varepsilon_n \sigma(\cdot)$ avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.
- La densité de Lévy $\nu_t(A) = \lambda(t)\mathbb{P}(Y_1 \in A)$ est inconnue. $\lambda(\cdot) \in \Lambda$ et $\mathbb{P}(Y_1 \in \cdot) \in \mathcal{G}$, deux classes non paramétriques.

E. Mariucci, Asymptotic equivalence for inhomogeneous jump diffusion processes and white noise. À paraître dans ESAIM.

Processus à accroissements indépendants

$$\mathcal{P}_n: \quad X_t = \eta + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t \sigma_n(s)dW_s + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \in [0, T_n],$$

- $f(\cdot) \in \mathcal{F}$ est **inconnue**.
- $\sigma_n^2(\cdot)$ est connu. Soit $T_n \rightarrow \infty$ et $\sigma_n(\cdot) = \sigma(\cdot)$, soit $T_n \equiv T$ et $\sigma_n(\cdot) = \varepsilon_n \sigma(\cdot)$ avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.
- La densité de Lévy $\nu_t(A) = \lambda(t)\mathbb{P}(Y_1 \in A)$ est inconnue.
 $\lambda(\cdot) \in \Lambda$ et $\mathbb{P}(Y_1 \in \cdot) \in \mathcal{G}$, deux classes non paramétriques.

$$\mathcal{Q}_n: \quad (X_{t_i})_{0 \leq i \leq n}, \quad \Delta_n = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty,$$

$$\mathcal{W}_n: \quad dy_t = f(t)dt + \sigma_n(t)dW_t, \quad y_0 = \eta, \quad t \in [0, T_n].$$

E. Mariucci, Asymptotic equivalence for inhomogeneous jump diffusion processes and white noise. À paraître dans ESAIM.

Processus à accroissements indépendants

Théorème (M., 2015)

Sous certaines conditions sur \mathcal{F} , $\Delta(\mathcal{Q}_n, \mathcal{W}_n) \rightarrow 0$ et $\Delta(\mathcal{P}_n, \mathcal{Q}_n) \rightarrow 0$.

E. Mariucci, Asymptotic equivalence for inhomogeneous jump diffusion processes and white noise, À paraître dans ESAIM.

Processus à accroissements indépendants

Théorème (M., 2015)

Sous certaines conditions sur \mathcal{F} , $\Delta(\mathcal{Q}_n, \mathcal{W}_n) \rightarrow 0$ et $\Delta(\mathcal{P}_n, \mathcal{Q}_n) \rightarrow 0$.

Si $\mathcal{F} \subseteq \left\{ f : \kappa \leq f(x) \leq M, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\gamma \right\}$, alors

$$\Delta(\mathcal{P}_n, \mathcal{Q}_n) = \Delta(\mathcal{Q}_n, \mathcal{W}_n) = O\left(\Delta_n^{\beta/2} + T_n \Delta_n^{2\gamma} \varepsilon_n^{-2} + T_n \Delta_n\right)$$

avec $\beta = 1$ si les sauts sont portés par \mathbb{Z} , $\beta = \frac{1}{2}$ si les sauts sont de loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

E. Mariucci, Asymptotic equivalence for inhomogeneous jump diffusion processes and white noise, À paraître dans ESAIM.

Processus à accroissements indépendants

Théorème (M., 2015)

Sous certaines conditions sur \mathcal{F} , $\Delta(\mathcal{Q}_n, \mathcal{W}_n) \rightarrow 0$ et $\Delta(\mathcal{P}_n, \mathcal{Q}_n) \rightarrow 0$.

Si $\mathcal{F} \subseteq \left\{ f : \kappa \leq f(x) \leq M, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\gamma \right\}$, alors

$$\Delta(\mathcal{P}_n, \mathcal{Q}_n) = \Delta(\mathcal{Q}_n, \mathcal{W}_n) = O\left(\Delta_n^{\beta/2} + T_n \Delta_n^{2\gamma} \varepsilon_n^{-2} + T_n \Delta_n\right)$$

avec $\beta = 1$ si les sauts sont portés par \mathbb{Z} , $\beta = \frac{1}{2}$ si les sauts sont de loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Technique de preuve : approximation de Bernoulli, construction explicite des noyaux, transformations de type Girsanov.

E. Mariucci, Asymptotic equivalence for inhomogeneous jump diffusion processes and white noise, À paraître dans ESAIM.

Une extension du résultat de Nussbaum (1996)

\mathcal{P}_n^g : $(Y_i)_{i=1}^n$ v.a. i.i.d. de densité commune $fg : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{W}_n^g : dy_t = \sqrt{f(t)g(t)}dt + \frac{dW_t}{2\sqrt{n}}, \quad t \in I.$$

- g est connue,
- f est inconnue et appartient à une certaine classe \mathcal{F} .

E. Mariucci, Asymptotic equivalence for density estimation and Gaussian white noise : An extension. En révision favorable aux Annales de l'ISUP.

Une extension du résultat de Nussbaum (1996)

\mathcal{P}_n^g : $(Y_i)_{i=1}^n$ v.a. i.i.d. de densité commune $fg : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{W}_n^g : dy_t = \sqrt{f(t)g(t)}dt + \frac{dW_t}{2\sqrt{n}}, \quad t \in I.$$

- g est connue,
- f est inconnue et appartient à une certaine classe \mathcal{F} .

Théorème (M., 2015)

Sous certaines conditions sur \mathcal{F} on peut montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(\mathcal{P}_n^g, \mathcal{W}_n^g) = 0$.

E. Mariucci, Asymptotic equivalence for density estimation and Gaussian white noise : An extension. En révision favorable aux Annales de l'ISUP.

Nouveauté par rapport aux travaux antérieurs

Remarque : on retrouve le résultat de Nussbaum (1996) au cas où $g(x) = 1$ et $I = [0, 1]$.

Nouveauté par rapport aux travaux antérieurs

Remarque : on retrouve le résultat de Nussbaum (1996) au cas où $g(x) = 1$ et $I = [0, 1]$.

Avantages :

- Les v.a. Y_i sont définies sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, pas forcément borné.
- Nous pouvons traiter le cas des v.a. à densité ($h = fg$) non nécessairement bornées ni lisses.

Nouveauté par rapport aux travaux antérieurs

Remarque : on retrouve le résultat de Nussbaum (1996) au cas où $g(x) = 1$ et $I = [0, 1]$.

Avantages :

- Les v.a. Y_i sont définies sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, pas forcément borné.
- Nous pouvons traiter le cas des v.a. à densité ($h = fg$) non nécessairement bornées ni lisses.

Techniques de preuve : approximation multinomiale-normale multivariée (associée à un choix d'une adéquate partition de I), construction explicite des noyaux réalisant l'équivalence asymptotique.

Processus de diffusion en petite variance

$$dy_t = f(y_t)dt + \varepsilon\sigma(y_t)dW_t, \quad t \in [0, T], \quad y_0 = \omega.$$

Problème : estimer $f(\cdot)$ à partir des observations discrètes $(y_{t_i})_{i=1}^n$, $t_i = T\frac{i}{n}$, est asymptotiquement équivalent à estimer $f(\cdot)$ à partir du schéma d'Euler :

$$Z_0 = \omega, \quad Z_i = Z_{i-1} + \frac{T}{n}f(Z_{i-1}) + \varepsilon\sqrt{\frac{T}{n}}\sigma(Z_{i-1})\xi_i,$$

avec $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ i.i.d. $i = 1, \dots, n$?

E. Mariucci, Asymptotic equivalence of discretely observed diffusion processes and their Euler scheme : Small variance case. À paraître dans SISP.

Processus de diffusion en petite variance

$$dy_t = f(y_t)dt + \varepsilon\sigma(y_t)dW_t, \quad t \in [0, T], \quad y_0 = \omega.$$

Problème : estimer $f(\cdot)$ à partir des observations discrètes $(y_{t_i})_{i=1}^n$, $t_i = T\frac{i}{n}$, est asymptotiquement équivalent à estimer $f(\cdot)$ à partir du schéma d'Euler :

$$Z_0 = \omega, \quad Z_i = Z_{i-1} + \frac{T}{n}f(Z_{i-1}) + \varepsilon\sqrt{\frac{T}{n}}\sigma(Z_{i-1})\xi_i,$$

avec $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ i.i.d. $i = 1, \dots, n$?

Motivation : l'inférence dans des modèles de diffusion observés d'une manière discrète est généralement difficile (densités de transition inconnues). En pratique, on considère des procédures d'estimation basées sur le schéma d'Euler.

E. Mariucci, Asymptotic equivalence of discretely observed diffusion processes and their Euler scheme : Small variance case. À paraître dans SISP.

L'espace des paramètres

La dérive f est inconnue et appartient à $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_M$:

$$\mathcal{F}_M = \left\{ |f(0)| \leq M \text{ et } |f(z) - f(y)| \leq M|z - y|, \quad \forall z, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le coefficient de diffusion $\varepsilon\sigma(\cdot)$ est supposé connu :

$$(H1) \quad \sigma_0^2 \leq \sigma^2(y) \leq \sigma_1^2 \text{ and } |\sigma(z) - \sigma(y)| \leq K|z - y|, \quad \forall z, y \in \mathbb{R}.$$

$$(H2) \quad |\sigma'(z) - \sigma'(y)| \leq K|z - y| \quad \forall z, y \in \mathbb{R}.$$

Remarque : les conditions ci-dessus sur f et σ garantissent l'existence et l'unicité d'une solution forte y de l'EDS :

$$dy_t = f(y_t)dt + \varepsilon\sigma(y_t)dW_t, \quad t \in [0, T], \quad y_0 = \omega.$$

Résultat principal

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_y^T &= (C, \mathcal{C}_T, (P_f^y, f \in \mathcal{F})), & P_f^y &= \mathcal{L}(y), \\ \mathcal{Q}_y^n &= (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), (Q_f^{n,y}, f \in \mathcal{F})), & Q_f^{n,y} &= \mathcal{L}((y_{t_i})_i), \\ \mathcal{Q}_Z^n &= (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), (Q_f^{n,Z}, f \in \mathcal{F})), & Q_f^{n,Z} &= \mathcal{L}((Z_i)_i).\end{aligned}$$

Théorème (M. 2015)

Si $\varepsilon n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$, les expériences \mathcal{P}_y^T , \mathcal{Q}_y^n et \mathcal{Q}_Z^n sont asymptotiquement équivalentes. Plus précisément, on a

$$\Delta(\mathcal{P}_y^T, \mathcal{Q}_Z^n) = O\left(\frac{1}{\varepsilon n} + (n^{-1} + \varepsilon)^{1/4}\right), \text{ en supposant (H1)}$$

$$\Delta(\mathcal{P}_y^T, \mathcal{Q}_y^n) = O\left(\frac{1}{\varepsilon n}\right), \text{ en supposant (H1)-(H2) + } \frac{f}{\sigma}\text{-Lipschitz.}$$

E. Mariucci, Asymptotic equivalence of discretely observed diffusion processes and their Euler scheme : Small variance case. À paraître dans SISP.

Quelques remarques

Comparaison avec d'autres résultats : Milstein,

Nussbaum : $\sigma \equiv 1, T_n \equiv 1, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_M,$

$$\Delta(\mathcal{P}_y^T, \mathcal{Q}_Z^n) = O(\sqrt{n^{-2}\varepsilon^{-2} + n^{-1}}), \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0;$$

Genon-Catalot, Larédo : $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_M \cap \{|f(x)| + |f'(x)| \leq M\},$

$$\Delta(\mathcal{P}_y^T, \mathcal{Q}_Z^n) = O(\sqrt{n^{-2}\varepsilon^{-2} + n^{-1} + n^{-1}\varepsilon^{-4}}).$$

V. Genon-Catalot, C. Larédo Asymptotic equivalence of nonparametric diffusion and Euler scheme experiments. Ann. Statist. (2014) 1145–1165.

G. Milstein, M. Nussbaum Diffusion approximation for nonparametric autoregression, Probab. Theory Related Fields (1998) 535–543.

Quelques remarques

Comparaison avec d'autres résultats : Milstein,

Nussbaum : $\sigma \equiv 1, T_n \equiv 1, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_M,$

$$\Delta(\mathcal{P}_y^T, \mathcal{Q}_Z^n) = O(\sqrt{n^{-2}\varepsilon^{-2} + n^{-1}}), \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0;$$

Genon-Catalot, Larédo : $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_M \cap \{|f(x)| + |f'(x)| \leq M\},$

$$\Delta(\mathcal{P}_y^T, \mathcal{Q}_Z^n) = O(\sqrt{n^{-2}\varepsilon^{-2} + n^{-1} + n^{-1}\varepsilon^{-4}}).$$

Techniques de preuve : changement de temps pour des diffusions, inégalité intégrale de Gronwall, convergence d'une diffusion en petite variance vers une solution déterministe.

V. Genon-Catalot, C. Larédo Asymptotic equivalence of nonparametric diffusion and Euler scheme experiments. Ann. Statist. (2014) 1145–1165.

G. Milstein, M. Nussbaum Diffusion approximation for nonparametric autoregression, Probab. Theory Related Fields (1998) 535–543.

Processus à accroissements indépendants

Soit $P_T^{(f_i, \sigma_i^2, \nu_i)}$ la loi d'un processus additif ayant comme caractéristique locale (f_i, σ_i^2, ν_i) , $i = 1, 2$. Supposons que ν_1 et ν_2 soient deux mesures de Lévy avec ν_1 absolument continue par rapport à ν_2 et telles que $L_1(\nu_1, \nu_2) < \infty$.

Résultat (Étoré, M., 2014)

Si $\sigma^2 > 0$, alors :

$$L_1\left(P_T^{(f_1, \sigma^2, \nu_1)}, P_T^{(f_2, \sigma^2, \nu_2)}\right) \leq 2 \sinh\left(TL_1(\nu_1, \nu_2)\right) + 2\left[1 - 2\phi\left(-\frac{\xi}{2}\right)\right].$$

Si $\sigma^2 = 0$ et $f_1 - f_2 \equiv \gamma^{\nu_1} - \gamma^{\nu_2}$, alors :

$$L_1\left(P_T^{(f_1, 0, \nu_1)}, P_T^{(f_2, 0, \nu_2)}\right) \leq 2 \sinh\left(TL_1(\nu_1, \nu_2)\right).$$

Conclusions : les travaux de cette thèse portent sur l'équivalence asymptotique entre différentes classes de modèles statistiques :

- Modèles de processus à sauts,
- Modèles à densité,
- Modèles de diffusion.

Conclusions : les travaux de cette thèse portent sur l'équivalence asymptotique entre différentes classes de modèles statistiques :

- Modèles de processus à sauts,
- Modèles à densité,
- Modèles de diffusion.

Perspectives : des extensions possibles des travaux de thèse sont

- Estimation non paramétrique de la densité de Lévy,
- Équivalence asymptotique pour des modèles de Lévy dépendant aléatoirement du temps,
- Équivalence asymptotique pour des modèles de diffusion multidimensionnels avec un coefficient de diffusion inconnu.

Merci pour votre attention !